Cálculo Diferencial e Integral I

LEE, LEIC-T, LEGI e LERC - 2º semestre - 2012/2013

3 de Junho de 2013 - 9 horas

I (11 val.)

1. (5,0 val.) Determine o valor dos integrais:

$$(i)\ \int_0^1 x\ln(3+x)\,dx \qquad (ii)\ \int_2^3 \frac{x^2+1}{(x+2)(x-1)^2}\,dx$$

Resolução. (i) Primitivando por partes $x\ln(3+x)$,

$$P\left(x\ln(3+x)\right) = \frac{x^2}{2}\ln(3+x) - P\left(\frac{x^2}{2}\frac{1}{3+x}\right)$$

Como $\dfrac{x^2}{3+x} = x - 3 + \dfrac{9}{3+x}$, obtém-se

$$P\left(x\ln(3+x)\right) = \frac{x^2}{2}\ln(3+x) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 3x + 9\ln(3+x)\right)$$

e pela fórmula de Barrow tem-se finalmente

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(x^2(\ln(3+x) - \frac{1}{2}) + 3x - 9\ln(3+x)\right)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-8\ln(4) + \frac{5}{2} + \frac{9}{2}\ln(3)\right)\ .$$

(ii) A função integranda é uma função racional que se decompõe em fracções simples

$$\int_2^3 \frac{x^2+1}{(x+2)(x-1)^2}\,dx = A\int_2^3 \frac{1}{x+2}\,dx + B\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx + C\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= A\left[\ln(x+2)\right]_2^3 + B\left[\ln(x-1)\right]_2^3 - C\left[\frac{1}{x-1}\right]_2^3.$$

A determinação das constantes A, B, C é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$x^2 + 1 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-2),$$

i.e

$$x^2 + 1 = (A+B)x^2 + (-2A + B + C)x + A - 2B + 2C,$$

vindo que

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ \\ -2A + B + C = 0 \\ \\ A - 2B + 2C = 1. \end{cases}$$

Obtém-se $A = 5/9,\ B = 4/9,\ C = 2/3,$, e conclui-se que:

$$\int_2^3 \frac{x^2+1}{(x+2)(x-1)^2}\, dx = 5/9\, [\ln(x+2)]_2^3 + 5/9\, [\ln(x-1)]_2^3 - 2/3 \left[\frac{1}{x-1}\right]_2^3 .$$

$$= 5/9\,(\ln(5/4)) + 4/9\,(\ln(4/3)) - 2/3 \left(\frac{1}{2}\right).$$

▪

2. (3,5 val.) Considere a função $F :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^x x\, f(t)\, dt\, .$$

em que $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função contínua

i) A função F é diferenciável em $]-1, +\infty[$? Defina a função derivada de F.

ii) Sendo $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{(t+3)\sqrt{t+2}}\, ,$$

determine $F(1)$ utilizando a substituição $t + 2 = u^2$.

Resolução.

i) A função $\int_0^x f(t)\, dt$ é um integral indefinido de uma função contínua em $]-1, +\infty[$ e portanto diferenciável em $]-1, +\infty[$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Como $F(x) = x \int_0^x f(t)\, dt$, resulta do produto de funções diferenciáveis em $]-1,+\infty[$ e é, também, diferenciável em $]-1,+\infty[$. A sua derivada é dada por:

$$F'(x) = \int_0^x f(t)\, dt + xf(x).$$

pela regra da derivada do produto e pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

ii) $F(1) = \int_0^1 \dfrac{1}{(t+3)\sqrt{t+2}}\, dt$. Integrando por substituição, usando a mudança de variável, $t+2 = u^2$, tem-se

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+3)\sqrt{t+2}}\, dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2u}{(u^2+1)u}\, du =$$

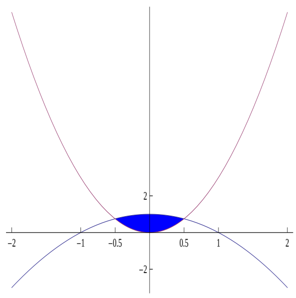
$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2}{(u^2+1)}\, du = 2\left[\operatorname{arctg}(u)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = 2\pi/3 - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2})\,.$$

▪

3. (2,5 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = 3x^2, \qquad y = 1 - x^2\,.$$

Resolução.



Estabelecendo $3x^2 = 1 - x^2$ tem-se $x = \pm\frac{1}{2}$, assim a área da região D é dada por:

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} 1 - x^2 - 3x^2\, dx.$$

Tem-se, pela fórmula de Barrow, que

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} 1 - x^2 - 3x^2\, dx = 2\left[x - \frac{4x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\,.$$

▪

II (8 val.)

1. (4,0 val.) Analise a natureza das séries e, em caso de convergência, determine a soma de uma delas:

$$(i)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+\sqrt{n^3}}{n+n^3} \qquad (ii)\sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathrm{tg}(\frac{1}{n}) \qquad (iii)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{n+1}+3^{n-1}}{2^{2n}}$$

Resolução.

i) Considerem-se as sucessões $a_n = \dfrac{n^2+\sqrt{n^3}}{n+n^3}$ e $b_n = \dfrac{n^2}{n^3} = \dfrac{1}{n}$. Tem-se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2+\sqrt{n^3}}{n+n^3}}{\frac{n^2}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+1/\sqrt{n}}{1/n^2+1} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

Do critério de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet divergente, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ com $p = 1 \leq 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2+\sqrt{n^3}}{n+n^3}$ é também divergente.

ii) Uma vez que $lim_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{x} = 1$, tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} n\,\mathrm{tg}(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{tg}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathrm{tg}(\frac{1}{n})$$

é divergente, pois não satisfaz a condição necessária para a convergência de séries.

iii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{n+1}+3^{n-1}}{2^{2n}} = e\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{4^n}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{4^n} = e\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e}{4}\right)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

As séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e}{4}\right)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ são duas séries geométricas convergentes, de razão $R=\frac{e}{4}<1$ (resp.$R=\frac{3}{4}<1$). A soma da série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{n+1}+3^{n-1}}{2^{2n}}=e\frac{\frac{e}{4}}{1-\frac{e}{4}}+\frac{1}{3}\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{e^2}{4-e}+1$$

▪

2. (3,0 val.) Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(2+x)^n$$

i) Sendo $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ determine o maior intervalo aberto de $\mathbb{R}$ onde a série de potências é absolutamente convergente.

ii) Sendo $a_n=2^{-n}$ determine, quando possível, a soma da série de potências.

Resolução.

(i) Tem-se para o raio de convergência

$$r=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}=1$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(2+x)^n$ converge absolutamente se $|x+2|<1$ i.e $-3<x<-1$ e diverge em $\mathbb{R}\setminus[-3,-1]$. Assim $]-3,-1[$ é o maior intervalo aberto onde a série de potências converge absolutamente.

(ii) Para a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}2^{-n}(2+x)^n\,,$$

é uma série de geométrica convergente sse $\left|\dfrac{2+x}{2}\right|<1$, i.e. $x\in]-4,0[$. A soma da série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2+x}{2}\right)^n=\frac{\frac{2+x}{2}}{1-\frac{2+x}{2}}=-\frac{2}{x}-1$$

▪

III (2 val.)

1. (2,0 val.) Seja $a \in]x_1\,,\, x_2[= I \subset \mathbb{R}$ e a função $f : I \to \mathbb{R}$ indefinidamente diferenciável. Mostre que se existir $k > 0$ tal que para $x \in I$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq k^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ em cada $x \in I$ converge para $f(x)$.

Resolução. Sendo função $f : I \to \mathbb{R}$ indefinidamente diferenciável, da fórmula de Taylor, tem-se

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad x \in I$$

em que

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad c \in]a, x[$$

Ora

$$|R_n(x)| \leq \frac{k^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

e como $\dfrac{b^n}{n!} \to 0$, com $b = k(x-a) \in \mathbb{R}$, tem-se para cada $x \in I$

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

▪