Cálculo Diferencial e Integral I

LEE, LEIC-T, LEGI e LERC - 2º semestre - 2012/2013

3 de Junho de 2013 - 9 horas

I (11 val.)

1. (5,0 val.) Determine o valor dos integrais:

$$(i) \int_1^2 \sqrt{x} \ln x \, dx \qquad (ii) \int_1^2 \frac{x+3}{(9-x^2)(1+x^2)} \, dx$$

Resolução. (i) Primitivando por partes $\sqrt{x} \ln x$,

$$P\left(\sqrt{x} \ln x\right) = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \ln x - P\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \frac{1}{x}\right) = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \ln x - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9}$$

e pela fórmula de Barrow tem-se finalmente

$$\int_1^2 \sqrt{x} \ln x \, dx = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \ln x - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left(12\sqrt{2}\ln(2) - 8\sqrt{2} + 4\right)$$

(ii) A função integranda é uma função racional que se decompõe em fracções simples

$$\int_1^2 \frac{x+3}{(9-x^2)(1+x^2)} \, dx = \int_1^2 \frac{1}{(3-x)(1+x^2)} \, dx = A \int_1^2 \frac{1}{3-x} \, dx + \int_1^2 \frac{Bx+C}{x^2+1} \, dx =$$

$$= A\left[\ln(3-x)\right]_1^2 + B/2\left[\ln(x^2+1)\right]_1^2 + C\left[\operatorname{arctg} x\right]_1^2.$$

A determinação das constantes A, B, C é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(3-x),$$

i.e

$$1 = (A-B)x^2 + (3B-C)x + A + 3C,$$

vindo que

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ 3B - C = 0 \\ A + 3C = 1. \end{cases}$$

Obtém-se $A = 1/10,\ B = 1/10,\ C = 3/10$, e conclui-se que:

$$\int_1^2 \frac{x+3}{(9-x^2)(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{10}\left[\ln(3-x)\right]_1^2 + \frac{1}{20}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^2 + \frac{3}{10}\left[\operatorname{arctg} x\right]_1^2.$$

$$= \frac{1}{10}\left(-\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(5/2) + 3\operatorname{arctg} 2 - \frac{3\pi}{4}\right).$$

▪

2. (3,5 val.) Considere a função $F :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^x x\,f(t)\,dt\,.$$

em que $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função contínua

i) A função F é diferenciável em $]-1,+\infty[$? Defina a função derivada de F.

ii) Sendo $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{(2+t)\sqrt{t+3}}\,,$$

determine $F(1)$ utilizando a substituição $t+3 = u^2$.

Resolução.

i) A função $\int_0^x f(t)\,dt$ é um integral indefinido de uma função contínua em $]-1,+\infty[$ e portanto diferenciável em $]-1,+\infty[$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Como $F(x) = x\int_0^x f(t)\,dt$, resulta do produto de funções diferenciáveis em $]-1,+\infty[$ e é, também, diferenciável em $]-1,+\infty[$. A sua derivada é dada por:

$$F'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + xf(x).$$

pela regra da derivada do produto e pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

ii) $F(1) = \int_0^1 \frac{1}{(2+t)\sqrt{t+3}}\,dt$. Integrando por substituição, usando a mudança de variável, $t+3 = u^2$, tem-se

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+2)\sqrt{t+3}}\,dt = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{2u}{u(u^2-1)}\,du = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{2}{(u^2-1)}\,du =$$

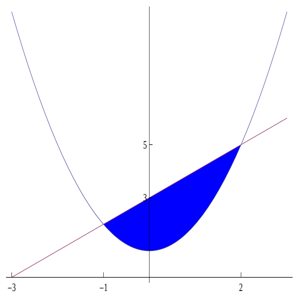
$$= \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{(u-1)} - \frac{1}{(u+1)}\,du = \left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_{\sqrt{3}}^2 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right).$$

▪

3. (2,5 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = x^2+1, \qquad y = x+3\,.$$

Resolução.



Estabelecendo $x^2+1 = x+3$ tem-se $x=-1$ ou $x=2$, assim a área da região D é dada por:

$$\int_{-1}^2 x+3-(x^2+1)\,dx.$$

Tem-se, pela fórmula de Barrow, que

$$\int_{-1}^2 -x^2+x+2\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^2 = \frac{10}{3}\,.$$

▪

II (8 val.)

1. (4,0 val.) Analise a natureza das séries e, em caso de convergência, determine a soma de uma delas:

$$(i)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^3}+n}{2+n^2} \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{+\infty} n\log(1+\frac{1}{n}) \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^{n-1}+3^{n+1}}{2^{2n}}$$

Resolução.

i) Considerem-se as sucessões $a_n = \dfrac{\sqrt{n^3}+n}{2+n^2}$ e $b_n = \dfrac{\sqrt{n^3}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Tem-se

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\dfrac{\sqrt{n^3}+n}{2+n^2}}{\dfrac{\sqrt{n^3}}{n^2}} = \lim \frac{1+1/\sqrt{n}}{2/n^2+1} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

Do critério de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = 1/2 \leq 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n^3}+n}{2+n^2}$ é também divergente.

ii) Uma vez que $lim_x \to 0\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$, tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\log(1+\frac{1}{n})$$

é divergente, pois não satisfaz a condição necessária para a convergência de séries.

iii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^{n-1}+3^{n+1}}{2^{2n}} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n}{4^n} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^n} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

As séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ são duas séries geométricas convergentes, de razão $R = \frac{\pi}{4} < 1$ (resp.$R = \frac{3}{4} < 1$). A soma da série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^{n-1} + 3^{n+1}}{2^{2n}} = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\pi}{4}}{1 - \frac{\pi}{4}} + 3 \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{4 - \pi} + 9 \,.$$

▪

2. (3,0 val.) Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (2 + x)^n$$

i) Sendo $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ determine o maior intervalo aberto de $\mathbb{R}$ onde a série de potências é absolutamente convergente.

ii) Sendo $a_n = 3^{-n}$ determine, quando possível, a soma da série de potências.

Resolução.

(i) Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}{\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}} = 1$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (2+x)^n$ converge absolutamente se $|x+2| < 1$ i.e $-3 < x < -1$ e diverge em $\mathbb{R} \setminus [-3, -1]$. Assim $]-3, -1[$ é o maior intervalo aberto onde a série de potências converge absolutamente.

(ii) Para a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n} (2 + x)^n \,,$$

é uma série de geométrica convergente sse $\left|\dfrac{2+x}{3}\right| < 1$, i.e. $x \in]-5, 1[$. A soma da série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2+x}{3}\right)^n = \frac{\frac{2+x}{3}}{1 - \frac{2+x}{3}} = \frac{2+x}{1-x} \,.$$

▪

III (2 val.)

1. (2,0 val.) Seja $a \in]x_1\,,\, x_2[= I \subset \mathbb{R}$ e a função $f : I \to \mathbb{R}$ indefinidamente diferenciável. Mostre que se existir $k > 0$ tal que para $x \in I$

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le k^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ em cada $x \in I$ converge para $f(x)$.

Resolução. Sendo função $f : I \to \mathbb{R}$ indefinidamente diferenciável, da fórmula de Taylor, tem-se

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad x \in I$$

em que

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad c \in]a, x[$$

Ora

$$|R_n(x)| \le \frac{k^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

e como $\dfrac{b^n}{n!} \to 0$, com $b = k(x-a) \in \mathbb{R}$, tem-se para cada $x \in I$

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

▪