

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste - LGM, LMAC, MEBiom, MEC, MEFT - 2º semestre -
2012/2013

3 de Junho de 2013 - 9 horas

I (11 val.)

1. (5,0 val.) Determine o valor dos integrais:

$$(i) \int_0^1 x \ln(3+x) dx \quad (ii) \int_2^3 \frac{x^2+1}{(x+2)(x-1)^2} dx$$

Resolução. (i) Primitivando por partes $x \ln(3+x)$,

$$P(x \ln(3+x)) = \frac{x^2}{2} \ln(3+x) - P\left(\frac{x^2}{2} \frac{1}{3+x}\right)$$

Como $\frac{x^2}{3+x} = x - 3 + \frac{9}{3+x}$, obtém-se

$$P(x \ln(3+x)) = \frac{x^2}{2} \ln(3+x) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 9 \ln(3+x) \right)$$

e pela fórmula de Barrow tem-se finalmente

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} dx &= \left[\frac{1}{2} \left(x^2(\ln(3+x) - \frac{1}{2}) + 3x - 9 \ln(3+x) \right) \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \left(-8 \ln(4) + \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \ln(3) \right). \end{aligned}$$

(ii) A função integranda é uma função racional que se decompõe em fracções simples

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^2+1}{(x+2)(x-1)^2} dx &= A \int_2^3 \frac{1}{x+2} dx + B \int_1^2 \frac{1}{x-1} dx + C \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \\ &= A [\ln(x+2)]_2^3 + B [\ln(x-1)]_2^3 - C \left[\frac{1}{x-1} \right]_2^3. \end{aligned}$$

A determinação das constantes A, B, C é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$x^2 + 1 = A(x - 1)^2 + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 2),$$

i.e

$$x^2 + 1 = (A + B)x^2 + (-2A + B + C)x + A - 2B + 2C,$$

vindo que

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B + C = 0 \\ A - 2B + 2C = 1. \end{cases}$$

Obtém-se $A = 5/9$, $B = 4/9$, $C = 2/3$, e conclui-se que:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^2 + 1}{(x + 2)(x - 1)^2} dx &= 5/9 [\ln(x + 2)]_2^3 + 5/9 [\ln(x - 1)]_2^3 - 2/3 \left[\frac{1}{x - 1} \right]_2^3 \\ &= 5/9 (\ln(5/4)) + 4/9 (\ln(4/3)) - 2/3 \left(\frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

■

2. (3,5 val.) Considere a função $F :] - 1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^x x f(t) dt.$$

em que $f :] - 1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua

i) A função F é diferenciável em $] - 1, +\infty[$? Defina a função derivada de F .

ii) Sendo $f :] - 1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{(t + 3)\sqrt{t + 2}},$$

determine $F(1)$ utilizando a substituição $t + 2 = u^2$.

Resolução.

- i) A função $\int_0^x f(t) dt$ é um integral indefinido de uma função contínua em $] - 1, +\infty[$ e portanto diferenciável em $] - 1, +\infty[$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Como $F(x) = x \int_0^x f(t) dt$, resulta do produto

de funções diferenciáveis em $] - 1, +\infty[$ e é, também, diferenciável em $] - 1, +\infty[$. A sua derivada é dada por:

$$F'(x) = \int_0^x f(t) dt + xf(x).$$

pela regra da derivada do produto e pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

- ii) $F(1) = \int_0^1 \frac{1}{(t+3)\sqrt{t+2}} dt$. Integrando por substituição, usando a mudança de variável, $t+2 = u^2$, tem-se

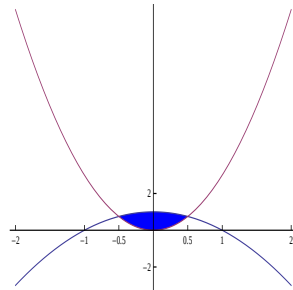
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(t+3)\sqrt{t+2}} dt &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2u}{(u^2+1)u} du = \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2}{(u^2+1)} du = 2 [\operatorname{arctg}(u)]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = 2\pi/3 - 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{2}). \end{aligned}$$

■

3. (2,5 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = 3x^2, \quad y = 1 - x^2.$$

Resolução.



Estabelecendo $3x^2 = 1 - x^2$ tem-se $x = \pm \frac{1}{2}$, assim a área da região D é dada por:

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - x^2 - 3x^2 dx.$$

Tem-se, pela fórmula de Barrow, que

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - x^2 - 3x^2 dx = 2 \left[x - \frac{4x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

■

II (8 val.)

1. (4,0 val.) Analise a natureza das séries e, em caso de convergência, determine a soma de uma delas:

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + \sqrt{n^3}}{n + n^3} \quad (ii) \sum_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (iii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n+1} + 3^{n-1}}{2^{2n}}$$

Resolução.

- i) Considerem-se as sucessões $a_n = \frac{n^2 + \sqrt{n^3}}{n + n^3}$ e $b_n = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$. Tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^2 + \sqrt{n^3}}{n + n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 1/\sqrt{n}}{1/n^2 + 1} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

Do critério de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = 1 \leq 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + \sqrt{n^3}}{n + n^3}$ é também divergente.

- ii) Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$$

é divergente, pois não satisfaz a condição necessária para a convergência de séries.

- iii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n+1} + 3^{n-1}}{2^{2n}} = e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{4^n} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^n} = e \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^n + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

As séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ são duas séries geométricas convergentes, de razão $R = \frac{e}{4} < 1$ (resp. $R = \frac{3}{4} < 1$). A soma da série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n+1} + 3^{n-1}}{2^{2n}} = e \frac{\frac{e}{4}}{1 - \frac{e}{4}} + \frac{1}{3} \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{e^2}{4 - e} + 1$$

■

2. (3,0 val.) Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (2+x)^n$$

- i) Sendo $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ determine o maior intervalo aberto de $\mathbb{R}$ onde a série de potências é absolutamente convergente.
- ii) Sendo $a_n = 2^{-n}$ determine, quando possível, a soma da série de potências.

Resolução.

(i) Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}} = 1$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (2+x)^n$ converge absolutamente se $|x+2| < 1$ i.e. $-3 < x < -1$ e diverge em $\mathbb{R} \setminus [-3, -1]$. Assim $]-3, -1[$ é o maior intervalo aberto onde a série de potências converge absolutamente.

(ii) Para a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} (2+x)^n,$$

é uma série de geométrica convergente sse $\left| \frac{2+x}{2} \right| < 1$, i.e. $x \in]-4, 0[$. A soma da série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2+x}{2} \right)^n = \frac{\frac{2+x}{2}}{1 - \frac{2+x}{2}} = -\frac{2}{x} - 1$$

■

III (2 val.)

1. (2,0 val.) Seja $a \in]x_1, x_2[= I \subset \mathbb{R}$ e a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ indefinidamente diferenciável. Mostre que se existir $k > 0$ tal que para $x \in I$

$$|f^{(n)}(x)| \leq k^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ em cada $x \in I$ converge para $f(x)$.

Resolução. Sendo função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ indefinidamente diferenciável, da fórmula de Taylor, tem-se

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad x \in I$$

em que

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad c \in]a, x[$$

Ora

$$|R_n(x)| \leq \frac{k^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

e como $\frac{b^n}{n!} \rightarrow 0$, com $b = k(x-a) \in \mathbb{R}$, tem-se para cada $x \in I$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

■